第 3 回　条件付確率・ベイズの定理

（教科書 1.1.3 条件付き確率）

条件付き確率（conditional probability）

　事象 A が起こったという前提で事象 B が起こる確率

　事象 A が起こり，かつ事象 B が起こる場合の数と，事象 A が起こる場合の数との比 $n(A \cap B)/n(A)$ により与えられる。

（A に対する B の）**条件付き確率**

　（A が起こったという仮定のもとでにおける B の条件付き確率）

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \ .$$

　条件付き確率は，標本空間 Ω のうち事象 A に含まれる事象だけを考える

　　$\Rightarrow$ 標本空間を A に縮小した

2 つの事象 A，B

　A の起こること，起こらないことが B に影響を与えないとき

$$P(B|A) = P(B), \quad P\left(B|\overline{A}\right) = P(B) \ .$$

このとき

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \ .$$

　　$\Rightarrow$ <u>事象 A と事象 B とは互いに**独立**（independent）</u>

条件付き確率の性質

　$P(A) > 0$ ならば

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$
- $P(A|A) = 1$
- $B_1, B_2, \cdots, B_n$ が互いに排反ならば $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i|A\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i|A)$

（教科書 1.1.4 ベイズの定理）

条件付き確率

$P(A) > 0$ のとき

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \ .$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \ .}$$

乗法定理（multiplication theorem）

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互いに排反で $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，$P(A_i) > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ ならば

$$\underline{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) \ .}$$

全確率の定理（total probability theorem）

$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$ より（$P(B) > 0$）

$$\underline{P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \ .}$$

ベイズの定理（Bayes' theorem）

参考文献

[1] 久保田一, 大石邦夫, 福本昌弘, "1.1 確率論の基礎", C 言語による情報理論入門, pp.6–10, コロナ社, 2007 (ISBN978–4–339–02521–0).