第 4 回　確率変数

（教科書 1.1.5 確率変数）

1 つのサイコロを振る試行

出る目の数を X とすると，変数 X の値はこの試行の結果によって決まる。
X のとる値に関する事象の確率も定まる。
この X のように，種々の値とその確率が定まる変数を**確率変数**（random variavle）という。

確率変数のとる値が有限個，離散値であれば
$\Rightarrow$ **離散型確率変数** $\Leftrightarrow$ （連続値であれば）連続型確率変数

離散型確率変数

離散型確率変数 X が値 x_i をとる事象を $\{X = x_i\}$，その確率を $P(X = x_i)$ で表す。

$$P(X = x_i) = \underline{f(x_i)}\ .$$

$\Rightarrow$ 確率変数 X の確率分布

確率分布の性質

- $f(x_i) \geq 0$
- $\displaystyle\sum_i f(x_i) = 1$

分布関数

任意の実数 x に対して確率変数 X のとる値が x 以下であるという事象を $\{X \leq x\}$ で表す。

その確率 $P(X \leq x)$ は x の関数

$$\underline{F(x)} = P(X \leq x) \ .$$

$\Rightarrow$ 分布関数

連続型確率変数

連続型確率変数 X のとる値が a より大きく b 以下である事象を $\{a < X \leq b\}$，その確率を $P(a < X \leq b)$ で表す。このとき

$$f(x) \geq 0 \tag{1a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \tag{1b}$$

を満たす $f(x)$ により

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{2}$$

と表される。この $f(x)$ を確率変数 X の**確率密度関数（確率密度，密度関数）**と呼ぶ。

連続型確率変数 X の分布関数

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ .$$

分布関数の性質

確率変数 X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ とする。

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

- $F(x)$ は非減少関数 $\Rightarrow$ $x_1 < x_2$ ならば $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$.

参考文献

[1] 久保田一, 大石邦夫, 福本昌弘, ”1.1.5 確率変数”, C 言語による情報理論入門, pp.10–11, コロナ社, 2007 (ISBN978–4–339–02521–0).

例）2 元対称通信路

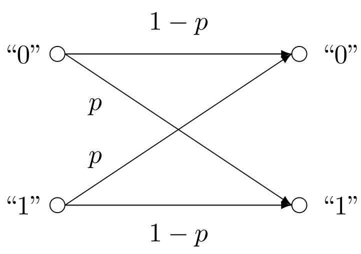

図 1. 2 元対称通信路

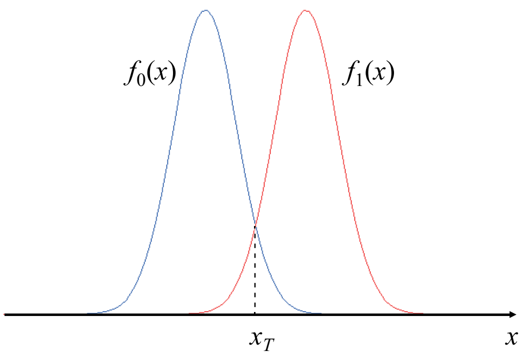

図 2. 受信信号の確率密度関数

$f_0(x)$: “0” を送信したときの受信信号の確率密度関数
$f_1(x)$: “1” を送信したときの受信信号の確率密度関数
x_T: 判定しきい値（受信信号 “0”，“1” を判定する境界）

$$
\begin{aligned}
P(\text{“0”}|\text{“0”}) &= P(X_0 \le x_T) = \int_{-\infty}^{x_T} f_0(x)dx = F_0(x_T) \\
P(\text{“0”}|\text{“1”}) &= P(X_1 \le x_T) = \int_{-\infty}^{x_T} f_1(x)dx = F_1(x_T) \\
P(\text{“1”}|\text{“0”}) &= P(X_0 > x_T) = 1 - P(X_0 \le x_T) = 1 - F_0(x_T) \\
P(\text{“1”}|\text{“1”}) &= P(X_1 > x_T) = 1 - P(X_1 \le x_T) = 1 - F_1(x_T)
\end{aligned}
$$

$P(\text{“0”}|\text{“0”})$: “0” を送信して受信信号を “0” と判定する確率
$P(\text{“0”}|\text{“1”})$: “1” を送信して受信信号を “0” と判定する確率
$P(\text{“1”}|\text{“0”})$: “0” を送信して受信信号を “1” と判定する確率
$P(\text{“1”}|\text{“1”})$: “1” を送信して受信信号を “1” と判定する確率