第 6 回　期待値・分散

（教科書 1.1.7 期待値と分散）

期待値（expectation）
　確率変数を平均したもの

離散型確率変数の期待値
　離散型確率変数 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の確率分布

$$P(X = x_i) = f(x_i), \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

　期待値

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

連続型確率変数の期待値
　連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$
　期待値

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

期待値の性質

- $E[aX + b] = aE[X] + b$ （a，b は定数）
- $E[X - \mu] = 0$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$
- $E[XY] \neq E[X]E[Y]$
  X と Y とが互いに独立であれば $E[XY] = E[X]E[Y]$
  $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立ならば $E[X_1 X_2 \cdots X_n] = E[X_1]E[X_2] \cdots E[X_n]$

分散（variance）
　確率分布の散らばりの度合を示す値
　確率変数 X の期待値を $\mu = E[X]$ とすると，
　X の μ からの偏差（$X - \mu$）の大きさ（2 乗）の期待値

分散 $V[X]$

$$\underbrace{V[X] = \sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2\right]}_{X \text{ の 分散}}$$

　分散 σ^2 が大きいほど X の値は期待値から離れて広範囲に散布

$\sigma = \sqrt{E\left[(x-\mu)^2\right]}$
標準偏差

分散の性質

期待値 $E[X]=\mu$, 分散 $V[X]=\sigma^2=E[(X-\mu)^2]$ とする

- $V[X]=\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=E[X^2-2\mu X+\mu^2]=E[X^2]-2\mu E[X]+\mu^2=E[X^2]-\mu^2$
- $V[aX+b]=E[(aX+b-E[aX+b])^2]=E[\{aX+b-(aE[X]+b)\}^2]=a^2E[(X-E[X])^2]=a^2V[X]$
- $V[X+Y]\neq V[X]+V[Y]$
  X と Y とが互いに独立であれば、$V[X+Y]=V[X]+V[Y]$
  $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立ならば、$V[X_1+X_2+\cdots+X_n]=V[X_1]+V[X_2]+\cdots+V[X_n]$

$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$

離散型確率変数 X

$$E[X^2]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)$$
$$E[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$
$$V[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\right)^2$$

連続型確率変数 X

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$
$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$
$$V[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right)^2$$

2 項分布の期待値と分散

・期待値

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \ {}_nC_x \ p^x (1-p)^{n-x} = np$$

・分散

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \ {}_nC_x \ p^x (1-p)^{n-x} = n(n-1)p^2 + np$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

正規分布の期待値と分散

・期待値

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \mu$$

・分散

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \sigma^2$$

参考文献

[1] 久保田一, 大石邦夫, 福本昌弘, "1.1.7 期待値と分散", C 言語による情報理論入門, pp.12–15, コロナ社, 2007 (ISBN978–4–339–02521–0).