第 9 回　相互情報量

（教科書 1.2.3 条件付きエントロピー，1.2.2 結合エントロピー）

条件付きエントロピー (conditional entropy)

送信側（情報源）の通報の組 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

各通報が送信される確率 $P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_n)$

受信側の通報の組 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$,

各通報が受信される確率 $P(y_1), P(y_2), \cdots, P(y_m)$

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ P(x_1), & P(x_2), & \cdots, & P(x_n) \end{array} \right\}$$

$$Y = \left\{ \begin{array}{cccc} y_1, & y_2, & \cdots, & y_m \\ P(y_1), & P(y_2), & \cdots, & P(y_m) \end{array} \right\}$$

（例）　サイコロの目

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 1/6, & 1/6, & 1/6, & 1/6, & 1/6, & 1/6 \end{array} \right\}$$

B のエントロピー（平均情報量）$H(B)$

$$H(B) = -\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \times \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 6 \quad \text{〔bit〕}$$

サイコロの目の結果についての事前情報

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} \text{奇数}, & \text{偶数} \\ 1/2, & 1/2 \end{array} \right\}$$

事前に奇数だとわかっているとき

$$\sum_{i=1}^{6} P(b_i | \text{奇数}) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$H(B | \text{奇数}) = -\sum_{i=1}^{6} P(b_i | \text{奇数}) \log_2 P(b_i | \text{奇数})$$

ここで,

$$P(1 | \text{奇数}) = P(3 | \text{奇数}) = P(5 | \text{奇数}) = \frac{1}{3}$$

$$P(2 | \text{奇数}) = P(4 | \text{奇数}) = P(6 | \text{奇数}) = 0$$

$$H(B | \text{奇数}) = -\sum_{i=1,3,5} \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 \quad \text{〔bit〕}$$

偶数の場合も同様に $H(B|\text{偶数}) = -\sum_{i=1,3,5} \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3$ 〔bit〕
出る目が奇数か偶数かの事前情報がある場合の出る目のエントロピー

$$\begin{aligned} H(B|A) &= P(\text{奇数})H(B|\text{奇数}) + P(\text{偶数})H(B|\text{偶数}) \\ &= \frac{1}{2} \times \log_2 3 + \frac{1}{2} \times \log_2 3 = \log_2 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ この $H(B|A)$ を **条件付き平均情報量** または **条件付きエントロピー** という。

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ P(x_1), & P(x_2), & \cdots, & P(x_n) \end{array} \right\} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

$$Y = \left\{ \begin{array}{cccc} y_1, & y_2, & \cdots, & y_m \\ P(y_1), & P(y_2), & \cdots, & P(y_m) \end{array} \right\} \qquad \sum_{j=1}^{m} P(y_j) = 1$$

事前に x_i がわかっているときの y_j である条件き付確率 $P(y_j|x_i)$

$$\sum_{j=1}^{m} P(y_j|x_i) = 1$$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) H(Y|x_i)$$

ここで

$$H(Y|x_i) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j|x_i) \log_2 P(y_j|x_i)$$

$$\Downarrow$$

条件付きエントロピー（条件付平均情報量）

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i)P(y_j|x_i) \log_2 P(y_j|x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \underline{P(x_i, y_j)} \log_2 P(y_j|x_i) \end{aligned}$$

結合確率 $P(x_i, y_j) = P(x_i \cap y_j)$

結合エントロピー（結合平均情報量）

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = 1$

エントロピーの関係

- $H(Y|X) \le H(Y)$, $H(X|Y) \le H(X)$
- $H(H,Y) = H(X) + H(Y|X)$
  $= H(Y) + H(X|Y)$
- $H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$
  $= H(X) + H(Y) - H(X,Y)$
  $= H(X,Y) - H(X|Y) - H(Y|X)$
- $0 \le H(X|Y) \le H(X) \le H(X,Y)$
  $0 \le H(Y|X) \le H(Y) \le H(X,Y)$

相互エントロピー（相互情報量）

通報の組 X と Y とが互いに関連しあう場合，

一方の通報 Y から他方の通報 X について，ある情報量が間接的に得られる。

$$\underbrace{I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)}_{\text{相互エントロピー（相互情報量）}}$$

相互エントロピー $I(X;Y)$ は，

（・Y を知ることによってもたらされる X のエントロピーの減少分）

・Y を知る前の X のエントロピー（事前エントロピー）$X(X)$ から
Y を知った後に残る X のエントロピー（事後エントロピー）$H(X|Y)$ を引いたもの

$\Downarrow$

・Y を知ることによる，X に関するあいまいさの減少分

$\Downarrow$

・Y によって伝えられる X に関する情報量

（例） サイコロの目（続き）

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 1/6, & 1/6, & 1/6, & 1/6, & 1/6, & 1/6 \end{array} \right\}, \qquad A = \left\{ \begin{array}{cc} \text{奇数}, & \text{偶数} \\ 1/2, & 1/2 \end{array} \right\}$$

$$I(B;A) = H(B) - H(B|A) = \log_2 6 - \log_2 3 = 1 \text{〔bit〕}$$

この値 $I(B;A)$ は

（サイコロの目が 1 つ出ることにより得られる情報量）

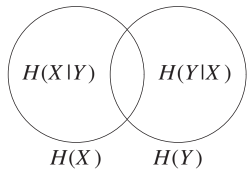
－（奇数か偶数かが事前にわかっているとき，その目が何であるかがわかることで
得られる情報量）

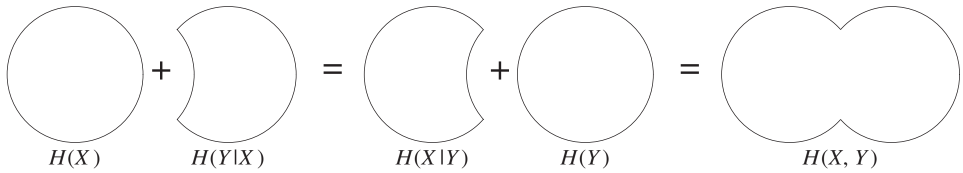
||

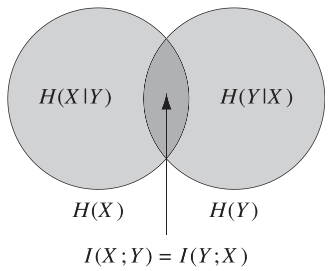
（奇数か偶数かを知ることにより得られる情報量）

相互エントロピーの性質

- $I(X;Y) \geq 0$
- $$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) = I(Y;X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \\ &= H(X,Y) - H(X|Y) - H(Y|X) \end{aligned}$$
- X と Y とが互いに独立な場合（$H(X|Y) = H(X), H(Y|X) = H(Y)$）
  $\Rightarrow I(X;Y) = I(Y;X) = 0$







参考文献

[1] 久保田一, 大石邦夫, 福本昌弘, ”1.2 情報の定量的把握とエントロピー”, C 言語による情報理論入門, pp.18–24, コロナ社, 2007 (ISBN978–4–339–02521–0).