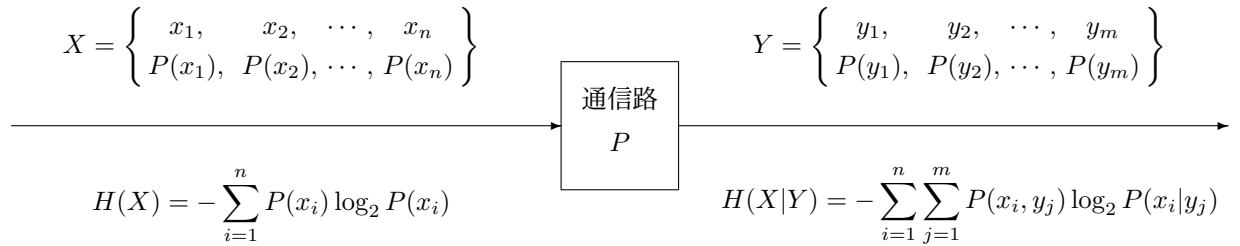


第 11 回 通信路容量

(教科書 4.2 通信路容量)

相互情報量 $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$



$I(X;Y)$

⇒ (情報源 X の持つ情報量)

– (Y を受信することで X の情報が間接的にわかった後に残る X の情報量)

↓

(Y の観測で得られた情報量)

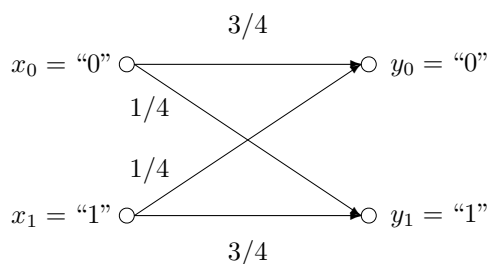
↓

(通信路で伝送された情報量)

通信理論においては、相互情報量のことを**伝送情報量** (transinformation) と呼ぶ。

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i|y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \end{aligned}$$

(例) 2元対称通信路の伝送情報量



$$P(x_0) = P(x_1) = 1/2$$

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(y_0|x_0) & P(y_1|x_0) \\ P(y_0|x_1) & P(y_1|x_1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} P(y_0) \\ P(y_1) \end{bmatrix} &= P^T \begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$P(y_0) = P(y_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(x_0, y_0) = P(x_0)P(y_0|x_0) = 1/2 \times 3/4 = 3/8$$

$$P(x_0, y_1) = P(x_0)P(y_1|x_0) = 1/2 \times 1/4 = 1/8$$

$$P(x_1, y_0) = P(x_1)P(y_0|x_1) = 1/2 \times 1/4 = 1/8$$

$$P(x_1, y_1) = P(x_1)P(y_1|x_1) = 1/2 \times 3/4 = 3/8$$

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P(x_i, y_j) \log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \\
 &= \frac{3}{8} \times \log_2 \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \times \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times \log_2 \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \log_2 \frac{3}{2} \\
 &= \frac{3}{4} \times \log_2 3 - 1 \\
 &\doteq 0.189 \text{ [bit/記号]}
 \end{aligned}$$

通信路容量の定義

伝送情報量 $I(X;Y)$ は, 送信記号 x_i の生起確率 $P(x_i)$ に依存

↓

伝送情報量 $I(X;Y)$ の $P(x_i)$ に対する伝送情報量の最大値が存在するはず

$$C = \max_{P(x_i)} I(X;Y)$$

通信路容量 (channel capacity)

各記号の平均伝送時間を τ [秒/記号] とすると,

伝送速度

$$R = \frac{I(X;Y)}{\tau} \text{ [bit/秒]}$$

単位時間当りの通信路容量

$$C^* = \max_{P(x_i)} \frac{C}{\tau} \text{ [bit/秒]}$$

(例) 雑音のない 2 元通信路

雑音のない (誤りのない) 2 元通信路では, $H(X|Y) = 0 \rightarrow$ 伝送情報量 $I(X;Y) = H(X)$

$$X = \left\{ \begin{array}{cc} x_0, & x_1 \\ p_0, & 1 - p_0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} C &= \max_{p_0} I(X;Y) = \max_{p_0} H(X) \\ &= \max_{p_0} \{-p_0 \log_2 p_0 - (1 - p_0) \log_2 (1 - p_0)\} \\ &= \max_{p_0} H(p_0) = 1 \text{ [bit/記号]} \end{aligned}$$

参考文献

- [1] 久保田一, 大石邦夫, 福本昌弘, "4.2 通信路容量", C 言語による情報理論入門, pp.94-100, コロナ社, 2007 (ISBN978-4-339-02521-0).